الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

نموذج اختبار البكالوريا في مادة الرياضيات

الشعبة : علوم تجريبية
المدة : 03 ساعات
المعامل : 05

<u>تمرين 1 (</u> 06 نقط)

$P(z)$ كثير الحدود في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ حيث :
$P(x)=z^3+(7-4i)z^2+(9-16i)z-9-21i$.

1) أثبت أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .
2) اكتب $P(z)$ على الشكل $P(z)=(z-z_0)(z^2+bz+c)$
3) احسب $(2-i)^2$ ثم حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$
4) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. A ، B و C ثلاث نقط من هذا المستوي لواحقها على الترتيب $-3;$ i و $-4+3i$.عين إحداثيتي G مرجح النقط A ، B و C المرفقة على الترتيب بالمعاملات 2 ، 1 و -1
5) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $2MA^2+MB^2-MC^2=-6$.

<u>تمرين 2 (</u> **04 نقط)**

صندوق يحتوي على 8 قريصات صفراء و15 حمراء غير مميزة باللمس. نسحب عشوائيا على التوالي ودون إرجاع قريصتين من الصندوق .
1-احسب احتمال الحادثة : E "القريصة المسحوبة الأولى صفراء"
2- نكرر سبعة مرات هذه التجربة،و بعد كل تجربة نرجع القريصتين إلى الصندوق . ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة المتمثلة في عدد وقوع الحادثة E خلال التجارب السبعة.
أ* احسب احتمال الحادثة A " الحادثة E تقع بالضبط 3 مرات"
ب* احسب احتمال الحادثة B " الحادثة E تقع 6 مرات على الأقل"

<u>تمرين3 (</u> **06 نقط)**

1. نعتبر الدالة g ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=x^2+3-2\ln x$$

أ) ادرس اتجاه تغييرات الدالة g .
ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

2. لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$$

C تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2cm$.

أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$

استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب) احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا.

ج) احسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

ليكن D المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$ ، احسب $\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

ه) أنشئ المستقيم D والمنحنى C الممثل للدالة f .

<u>تمرين 4 </u>**(04 نقط)**

لتكن $A;B;C$ ثلاثة نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة و ليكن k عدد حقيقي حيث $k\in[-1;+1]$.نضع G_k مرجح الجملة : $\{(A;k^2+1),(B;k),(C;1-k)\}$.

1) مثل النقط $C;B;A$ و I منتصف $[BC]$ ثم أنشئ النقطتين G_1 و G_{-1} .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[-1;+1]$ فإن : $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

*** اكتب جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[-1;+1]$ كما يلي : $f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$.**

*** استنتج مجموعة النقط G_k لما k يمسح المجال $[-1;+1]$.**

الحلول النموذجية

التمرين 1

) نعلم أن $z_0^3+(7-4i)z_0^2+(9-16i)z_0-9-12i=0$ و منه

$$\begin{cases} z_0^3+7z_0^2+9z_0-9=0....(1) \\ -4z_0^2-16z_0-12=0....(2) \end{cases}$$

و منه $z_0=-3$. ومنه $P(z)=(z+3)(z^2+bz+c)$ ، ننشر و بالمطابقة نجد
: $b=4-4i$ و $c=-3-4i$.

نضع $z^2+4(1-i)z-3-4i=0$ و $\Delta'=(2-i)^2$ و منه $z_1=i$ و $z_2=-4+3i$.

جذور $P(z)$ هي $-4+3i$; i ; -3 .

2) أ) $(2+1-1)\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ إذن $2z_G=2z_A+z_B-z_C$ و منه $Z_G=-1-i$.

و ومنه $\overrightarrow{OG}=-\vec{i}-\vec{j}$

ب) ليكن $\Gamma=\{M\in(p):2MA^2+MB^2-MC^2=-6\}$ نكتب :

$$2MA^2+MB^2-MC^2=2MG^2+2\left[\overrightarrow{MG}\left(2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}\right)\right]+2GA^2+GB^2-GC^2=-6$$

و منه $\overrightarrow{OG}=-\vec{i}-\vec{j}$

و بما أن $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ و $GC^2=25$; $GB^2=5$; $GA^2=5$ فإن :

$(\Gamma)=\{M\in(P)/MG^2=2\}$ و منه (Γ) هي الدائرة التي مركزها G و طول نصف قطرها $\sqrt{2}$.

– $P(E)=\frac{8}{23}$ ، 2 أ $P(A)=P(X=3)=\binom{7}{3}\times\left(\frac{8}{23}\right)^3\times\left(\frac{15}{23}\right)^4\approx 0.2664$

2 ب $P(B)=P(X\geq 6)=P(X=6)+P(X=7)=\binom{7}{6}\times\left(\frac{8}{23}\right)^6\times\left(\frac{15}{23}\right)+\binom{7}{7}\times\left(\frac{8}{23}\right)^7\approx 0.0087$

التمرين 3:

1. أ) لدينا : $\lim_{x\to 0} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(2x+\frac{3}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right)=+\infty$

$$g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$$

نلاحظ بسهولة أن $g'(x)$ له إشارة $(x-1)$ على المجال $]0;+\infty[$.

و منه جدول تغيرات الدالة g .

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

ب) من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن $g(x)$ موجب تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2. أ) من $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$ ينتج أن $f'(x)$ له إشارة $g(x)$ ، وهذا يعني أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{x^2-1}{2x}\right)=-\infty$

ومنه المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب للمنحنى C.

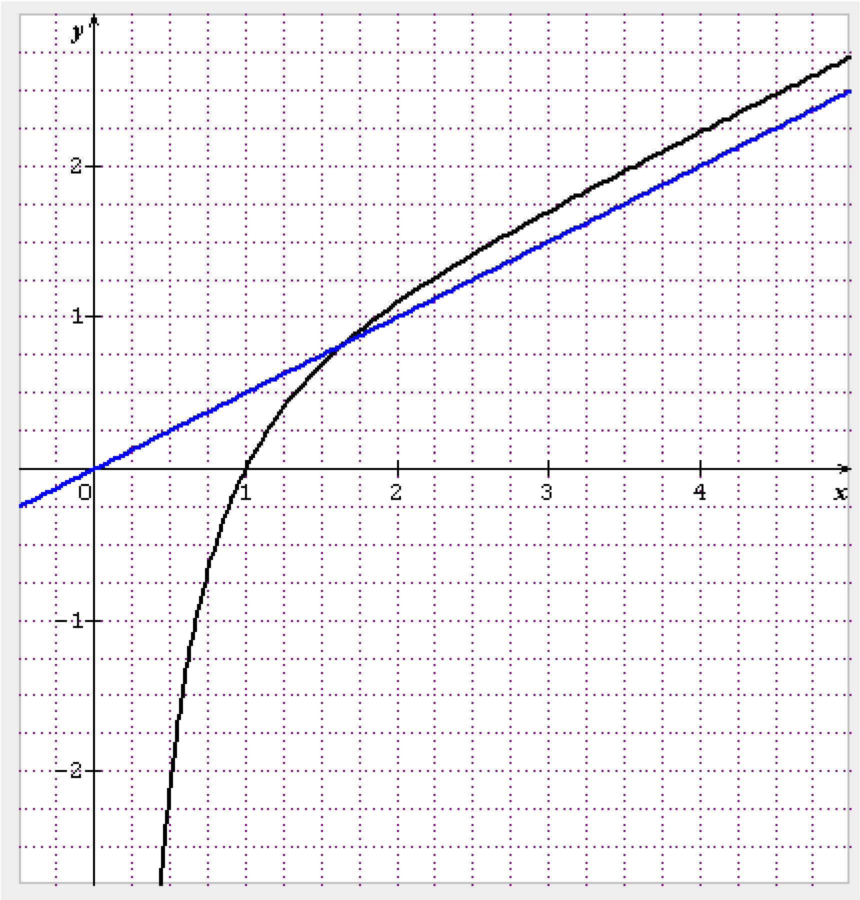
ج) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x}\right)=0$ وهذا يعني أن D مستقيم مقارب للمنحنى C.

د) جدول تغيرات الدالة f .

x	0 1 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

هـ)



التمرين 4

* لدينا فرضا : $2\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}-\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$ و نكتب $2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ حيث J مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1)\}$ و منه $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ إذن $3\overrightarrow{G_1J}-\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$ و منه $\overrightarrow{JG_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{JC}$.

* لدينا فرضا : $2\overrightarrow{G_{-1}A}-\overrightarrow{G_{-1}B}+\overrightarrow{G_{-1}C}=\vec{0}$ و L مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1)\}$ أي $\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}=\vec{0}$ و منه $\overrightarrow{AL}=-\overrightarrow{AB}$ و منه $\overrightarrow{G_{-1}L}+\overrightarrow{G_{-1}C}=\vec{0}$ و هذا يعني أن G_{-1} منتصف $[LC]$.

2) G_k مرجح الجملة : $\{(A;k^2+1),(B;k),(C;1-k)\}$ معناه

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}+k\overrightarrow{G_kB}-k\overrightarrow{G_kC}=\vec{0}$$

أي $(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}+k\overrightarrow{G_kA}+k\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{G_kA}-k\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ و منه

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}+k\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$$

و منه $(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}=-k\overrightarrow{CB}$ أي : $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

* $f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$ و منه

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

x	-1	$+1$
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	$+\frac{1}{2}$ ↘	$-\frac{1}{2}$

نستنتج أنه لما k يمسح المجال $[-1;+1]$

فإن $\left(\frac{-k}{k^2+1}\right)$ يمسح المجال $\left[-\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right]$

و بالتالي مجموعة النقط G_k لما k يمسح المجال $[-1;+1]$ هي القطعة $[G_1G_{-1}]$.